METODE NUMERICE ÎN INGINERIE

INTEGRAREA NUMERICĂ

INTEGRAREA NUMERICĂ

In formularea cea mai generală a problemei, se consideră funcţia reală y = f(x), continuă pe intervalul [a , b], pentru care există primitiva F(x).

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{unde } F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Cea mai mare parte a metodelor de integrare se bazeaza pe decompunerea intervalului [a, b] intr-o serie de subintervale mai inguste, valoarea integralei definite rezultand ca o suma a ariilor aproximate ale fiecarei fasii astfel obtinute.

Metodele se impart in doua mari categorii:

- Metode in care intervalele sunt alese anticipat: metoda trapezelor, metoda Simpson, metoda Newton-Côtes;
- Metode in care localizarea sau/si lungimea intervalelor se stabilesc in cursul aplicarii metodei pe baza unei analize care urmeaza asigurarea unei precizii cat mai bune: metoda cuadraturii Gauss sau metoda Romberg.

INTEGRAREA NUMERICĂ

Fomule de cuadratura

Se considera integrala definita de relatia (1) a carei valoare se doreste calculata printr-un procedeu de cuadratura numerica.

Intervalul [a, b] se decompune in n subintervale cu noduri echidistante:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n < x_{n+1} = b \qquad (2)$$

astfel incat integrala I poate fi descompusa astfel:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad (3)$$

INTEGRAREA NUMERICĂ

Metoda trapezelor

Aceasta metoda apeleaza la aproximatia functiei f(x) pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$ printr-un polinom Newton de interpolare de gradul I:

$$f(x) = y_k + \frac{\Delta y_k}{1!h}(x - x_k) \tag{4}$$

unde: $h = x_{k+1} - x_k$ iar $y_k = f(x_k)$.

Tinand cont de expresia (4), relatia (3) poate fi scrisa sub forma:

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[y_k + \frac{\Delta y_k}{1!h}(x - x_k) \right] dx \tag{5}$$

INTEGRAREA NUMERICĂ

Daca se noteaza expresia $\frac{x - x_k}{h} = t$ rezulta:

$$I_k = h\int_0^1 (y_k + \Delta y_k)dx = h\left(y_k + \frac{\Delta y_k}{2}\right) \tag{6}$$

Deoarece $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ rezulta:

$$I_k = \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}) \tag{7}$$

Astfel, inlocuind relatia (7) in relatia (3):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_k + y_{k+1}) \tag{8}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(y_a + y_b + \sum_{k=2}^{n-1}(y_k + y_{k+1})\right) \tag{9}$$

unde: $y_a = f(a)$ si $y_b = f(b)$.

INTEGRAREA NUMERICĂ

Relatia (9) reprezinta formula trapezelor deoarece integrala reprezinta din punct de vedere geometric aria cuprinsa intre curba y = f(x) si x = 0 si este aproximata prin suma ariilor trapezelor construite prin divizarea intervalului [a, b].

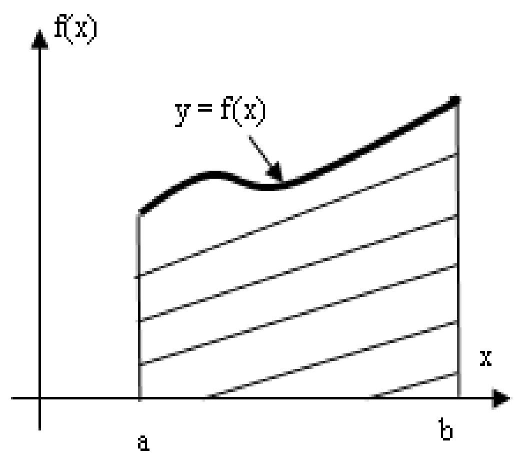

Fig. 1. Semnificația geometrică a integralei definite

INTEGRAREA NUMERICĂ

Determinarea erorii de aproximare

Pentru determinarea erorii de aproximare se considera o primitiva F(x) a functiei f(x). Astfel, eroarea asociata unui interval $[x_k, x_{k+1}]$ poate fi calculata cu expresia:

$$e_k(f) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] = F(x_{k+1}) - F(x_k) - \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] \qquad (10)$$

Functiile $f(x_{k+1})$ si $F(x_{k+1})$ se dezvolta in serii Taylor in jurul punctului x_k si se tine seama de relatiile F'(x)=f(x), respectiv F''(x)=f'(x):

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + h) = f(x_k) + \frac{h}{1!} f'(x_k) + \frac{h^2}{2!} f''(\varepsilon_k) \qquad (11)$$

$$F(x_{k+1}) = F(x_k + h) = F(x_k) + \frac{h}{1!} f(x_k) + \frac{h^2}{2!} f'(\varepsilon_k) + \frac{h^3}{3!} f''(\varepsilon_k) \qquad (12)$$

unde $\varepsilon_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

INTEGRAREA NUMERICĂ

Daca se inlocuiesc relatiile (11) si (12) in relatia (10), acesta devine:

$$e_k(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon_k) \tag{13}$$

Eroarea totala de aproximare, tinand cont de relatia (13) va fi:

$$e_T(f) = \sum_{k=1}^{n} e_k(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^{n} f''(\varepsilon_k) \tag{14}$$

Daca se considera un punct mediu $\varepsilon \in [a, b]$ astfel incat

$$f''(\varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\varepsilon_k) \tag{15}$$

INTEGRAREA NUMERICĂ

si avand in vedere ca h = (b – a)/n, eroarea totala devine:

$$e_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\varepsilon) \qquad (16)$$

Daca M = max | f ”(ε) |, ε ∈ [a, b] rezulta:

$$|e_T(f)| \le -\frac{(b-a)^3}{12n^2} M \qquad (17)$$

Metoda Simpson

Aceasta metoda apeleaza la aproximatia functiei f(x) pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$ printr-un polinom Newton de interpolare de gradul II.

$$f(x) = y_k + \frac{\Delta y_k}{1!h}(x - x_k) + \frac{\Delta^2 y_k}{2!h}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \tag{18}$$

unde:

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k \\ \Delta^2 y_k &= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \end{aligned} \tag{19}$$

Daca se fac notatiile $\frac{x - x_k}{h} = t$ si $x_{k+1} = x_k + h$ relatia (18) se modifica astfel:

$$f(t) = y_k + \Delta y_k t + \frac{\Delta^2 y_k}{2}(t - 1)t \tag{20}$$

INTEGRAREA NUMERICĂ

Valoarea aproximarii integralei I_k pe subintervalul considerat este:

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx = h\int_0^2 f(t)dt = h\int_0^2 \left[y_k + \Delta y_k t + \frac{\Delta^2 y_k}{2}(t-1)t \right] dt \qquad (21)$$

Rezolvand integrala, valoarea finala a acesteia este:

$$I_k = \frac{h}{3}\left(y_k + 4y_{k+1} + y_{k+2} \right) \qquad (22)$$

In final, valoarea aproximativa a integralei, tinand cont de relatia (22) este:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{p}\left(y_{2k-1} + 4y_{2k} + y_{2k+1} \right) \qquad (23)$$

Relatia (23) reprezinta formula Simpson de calcul a integralelor definite folosind polinoame de interpolare de gradul II.

INTEGRAREA NUMERICĂ

Eroarea totala de aproximare a integralei folosind formula Simpson este:

$$e_T(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\varepsilon) \qquad (24)$$

Daca $M = \max | f^{IV}(\varepsilon) |$, $\varepsilon \in [a, b]$ rezulta:

$$|e_T(f)| \leq -\frac{(b-a)^5}{180n^4} M \qquad (25)$$